DOMANDE:

CONWAY par. 6 77 ANALISI
cap. 4 loc. convessi par. 3 GEOMETRIA

$T_1 \iff T_2$ — $\{x\}$ chiusi

$\odot \quad \odot \quad T_2$
$O \quad \cdot \quad T_1$
$\diamond$

} la struttura algebrica li implica

Vale per Gruppi topologici (aggiungendo Hausdorff)

Se l'identità ha un sys. fond. di intorni numer., allora è metrizzabile.

X svt $f: X \to \mathbb{R}$ lin. e cont. $\Rightarrow$ $X \setminus \mathrm{Ker} f$ è sconnesso e ha per componenti connesse
l.c.

$A = \{x : f(x) < 0\}$ e $B = \{x : f(x) > 0\}$

$X \setminus \mathrm{Ker} f$ è aperto

In uno svt ogni connesso aperto è connesso per archi. + l. convesso

A connesso aperto $\Rightarrow$ A connesso per archi

$x_0 \in A$ $\quad \phi = D = \{x \in A : x$ può essere connesso con un arco ad $x_0\}$

$\bar{x} \in D$

Supponiamo che $X \setminus \mathrm{Ker} f$ sia connesso $\Rightarrow$ connesso per archi

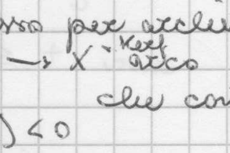
$x_0 \in A$, $y_0 \in B$ $\quad x_0, y_0 \in X \setminus \mathrm{Ker} f$ $\quad \exists\, \gamma : [0,1] \to X \setminus \mathrm{Ker} f$ arco che contiene x_0 e y_0

$(f \circ \gamma)(x_0) < 0$
$(f \circ \gamma)(y_0) > 0$
+ teorema degli zeri

$\exists z : \quad (f \circ \gamma)(z) = 0$
$f[\gamma(z)] = 0 \quad \gamma(z) \in \mathrm{Ker} f$

Def. Due convessi sono separati se $f > \alpha$ e $f < \alpha$
STRETTA

NON STRETTA
è ammesso un uguale
$f \geq \alpha$ e $f < \alpha$ o $f > \alpha$ e $f \leq \alpha$



oppure $\quad x \notin \mathrm{Ker} f \quad f(x) > 0$ e $f(-x) < 0 \quad f(X \setminus \mathrm{Ker} f) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso

<u>Lemma</u>: X svt, C convesso aperto, $o \in C$

$\Rightarrow$ 1) $\bigcup_{t>0} tC = X$

ii) $C = \{x : q(x) < 1\}$

<u>Dim.</u>: 1) $x \in X \quad t \to tx$ continua perché lo sp. vett. è top.
$\mathbb{R} \to X$
$0 \to 0$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \quad [-\varepsilon, \varepsilon]$ viene portato in C poiché C aperto
$\varepsilon x \in C$
$x \in \frac{1}{\varepsilon} C$

2) In gen. $\{x : q(x) < 1\} \subseteq C$

iii) $x \in C$

$t \longrightarrow tx$ $\qquad \exists\, \varepsilon > 0 : [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ è portato in C

$1 \longrightarrow x \in C$ $\qquad (1+\varepsilon)x \in C \qquad x \in \frac{1}{1+\varepsilon} C$

$$q_C(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

$\Rightarrow C \subset \{x : q(x) < 1\}$

La due è susseguente

<u>Teo</u>: X evt su $\mathbb{R}$, C convesso aperto, $0 \in C$ e $x_0 \notin C$.
allora $\exists f \in X^*$ t.c. $f(x_0) = 1$ e $f(c) < 1 \quad \forall c \in C$

<u>Dim</u>. Sia q il funzionale di Minkowski associato a C.

$M = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$ Definisco $f_1 : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $tx_0 \longrightarrow t$ $\qquad f_1(x_0) = 1$

$f(y) \leq q(y) \quad \forall y \in M$

$f_1(tx_0) \leq q(tx_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Se $t \leq 0 \qquad t f_1(x_0) \leq q(tx_0)$

$t = 0 \qquad 0 = 0$

$t > 0$

$C = \{x : q(x) \leq 1\} \qquad x_0 \notin C \qquad q(tx_0) = t\, q(x_0) \geq t$

$q(x_0) \geq 1$

ma $t \leq q(tx_0)$ $\left[\begin{array}{l} + \text{ omogeneità di funz. di Minkowski} \\ + \ C = \{x : q(x) \leq 1\} \end{array}\right.$

H.B. esiste un'estensione di f_1 che continua a verificare
$f(x) \leq q(x) \quad \forall x \in X$

$f_1(c) \leq q(c) < 1 \Rightarrow f(c) < 1 \quad \forall c \in C$

f lin. $\Rightarrow$ basta dim. che f è limitata

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, U_\varepsilon$ intorno di 0 in X :

$\forall u \in U_\varepsilon \quad |f(u)| \leq \varepsilon$

$\varepsilon > 0 \qquad U_\varepsilon = \varepsilon C \cap (-\varepsilon C)$ intorno di zero

$\Downarrow$

$u = \varepsilon c = -\varepsilon c'$

$f(u) = \varepsilon f(c) \leq \varepsilon q(c) < \varepsilon$

$f(-u) = +\varepsilon f(c') \leq +\varepsilon q(c) < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad |f(u)| \leq \varepsilon$

<u>Oss</u>. Se $f(x) \leq q(x)$ + lin. $\Rightarrow$ continua

Teo 2. X SVT su $\mathbb{R}$, A, B convessi non vuoti, $A \cap B = \emptyset$ e A aperto.
Allora $f \in X^*$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$: $f(a) < \alpha \leq f(b)$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$

Dim. Definiamo $C = A - B + b_0 - a_0$ ove $b_0 \in B$ e $a_0 \in A$
C è convesso, aperto e $x_0 \notin C$ posto $x_0 = b_0 - a_0$

$$t(a-b) + \cancel{t(b_0 - a_0)} + (1-t)(a'-b') + \cancel{(1-t)(b_0 - a_0)}$$
$$= \underbrace{ta + (1-t)a'}_{\in A} - [\underbrace{tb + (1-t)b'}_{\in B}] + b_0 - a_0 \in A - B + b_0 - a_0$$

Se $x_0 = b_0 - a_0$, $b_0 - a_0 = a - b + b_0 - a_0$ $a - b = 0 \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

$$C = \bigcup_{b \in B} (A \underbrace{- b + b_0 - a_0}_{\text{traslazione}})$$ unione di aperti traslati
Hyp: A aperto

Teo 1 $\exists f \in X^*$ t.c. $f(x_0) = 1$ e $f(c) < 1$ $\forall c \in C$

$f(b_0 - a_0) = 1$
$f(a) - f(b) < 1$ $\forall a \in A$ e $\forall b \in C$
$+ f(b_0) - f(a_0)$
$f(a) - f(b) < 0$

$\alpha = \inf \{ \cancel{b \in B} : f(b) : b \in B \} = \inf_{b \in B} f(b)$

Voglio mostrare che $f(a) < \alpha$ $\forall a \in A$
Supp. $\exists a_1 \in A$: $f(a_1) = \alpha$

$t \longrightarrow a_1 + t x_0$ continua
$0 \longrightarrow a_1 \in A$
$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $[-\varepsilon, \varepsilon]$ è portato in A
$f(a_1 + \varepsilon x_0) \leq \alpha$
$\underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{f(a_1)}} + \varepsilon \underset{1}{\underset{\shortparallel}{f(x_0)}} \leq \alpha$
$\alpha + \varepsilon \leq \alpha$